ماتریس:

مثال(۱):

مثال(۲):

الف) $A_{۲\times۲} = \underset{a_{ij}}{[i+j]} =$

ب) $B_{۲\times۳} = [۲i^{۲}] =$

ج) $C_{۳۳} = [i - ۳j] =$

انواع ماتریس:

ماتریس تک (۱)

ماتریس سطری(۲)

ماتریس ستونی(۳)

ماتریس صفر(۴)

ماتریس مربعی(۵)

ماتریس قطری(۶)

ماتریس اسکالر(۷)

ماتریس واحد(همانی) (۸)

ماتریس شبه قطری(۹)

ماتریس بالامثلثی (۱۰)

ماتریس پایین مثلثی(۱۱)

ماتریس اکیداً بالا مثلثی(۱۲)

ماتریس اکیداً پایین مثلثی(۱۳)

ماتریس خود توان(۱۴)

اگر m کوچکترین عددی باشد که $A^m = \overline{O}$: ماتریس پوچ توان از مرتبه ی m ام (۱۵)

ماتریس متقارن (۱۶)

ماتریس پادمتقارن(۱۷)

اعمال روی ماتریس ها:

۱) ضرب عدد حقیقی در ماتریس

مثال ۱۸ $r=-۲ \qquad A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۵ \\ ۴ & -۲ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$

۲) جمع و تفاضل دو ماتریس

مثال ۱۹ $A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} -۱ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

$B_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۷ & ۹ & ۰ \\ -۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) ضرب دو ماتریس

مثال ۲۰ $A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

$B_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۰ \\ ۳ & -۶ & -۱ \end{bmatrix}$

مثال ۲۱ $A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۴ & -۵ \end{bmatrix}$

$B_{۳\times۲}=\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

مثال ۲۲ $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} ۰ & -۷ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$

مثال ۲۳ $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$

ترانهاده ی ماتریس:

مثال ۲۴ : $A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۰ \\ -۱ & \sqrt{۷} & \frac{۱۹}{۲} \end{bmatrix}$

خواص ترانهاده ها:

خواص اعمال روی ماتریس:

۱- جمع ماتریس ها دارای خاصیت جابجایی است.

۲- جمع ماتریس ها دارای عضو خنثی است.

۳- جمع ماتریس ها دارای عضوقرینه است.

۴-

۵-

۶- جمع ماتریس ها دارای خاصیت شرکت پذیری است.

۷- ضرب ماتریس ها دارای خاصیت شرکت پذیری است.

۸- ضرب ماتریس ها دارای عضو خنثی است.

۹- ضرب ماتریس ها نسبت به جمع وتفاضل دارای خاصیت توزیع پذیری از چپ وراست است.

۱۰-

۱۱-

۱۲-

۱۳-

۱۴-

۱۵-

۱۶- ضرب ماتریس ها دارای خاصیت جابجایی نیست

۱۷- ضرب ماتریس ها دارای خاصیت حذف نیست

۱۸- ضرب ماتریس ها دارای مقسوم علیه صفر نیست یعنی ضرب دو ماتریس غیرصفر می تواند صفر شود.

۱۹- استفاده از اتحادهای جبری درباره ماتریس ها به شرط آن که ضربشان دارای جابجایی باشد امکان دارد.

۲۰- دو ماتریس را تعویض پذیر گوییم هرگاه ضربشان دارای خاصیت جابجایی باشند. بعضی از ماتریس ها پذیر عبارتنداز:

الف) ماتریس های اسکالر با ماتریس هم مرتبه با خودشان

ب) ماتریس ها ۲×۲ به شکل زیر

ج) ماتریس های ۲×۲ به شکل زیر

اگر A ماتریس مربعی دلخواه باشد داریم:

۱) متقارن $A+A^t$

۲) پادمتقارن $A-A^t$

هرماتریس مربعی دلخواه را می توان به صورت حاصل جمع دو ماتریس متقارن و یاد متقارن نوشت:

۴) متقارن AA^t

۵) AB^t+BA^t متقارن

۶) AB^t-BA^t پاد متقارن

مثال ۲۹: A را به صورت حاصلجمع ماتریس های متقارن و پادمتقارن بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۷ & -۱ \\ -۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

ماتریس های تبدیل:

ماتریس های ۲×۲ هستند که از سمت چپ در مختصات نقطه که به صورت یک ماتریس ستونی نوشته می شود ضرب گردیده ومختصات نقطه جدید را به ما می دهند. برخی از معروفترین آن ها عبارتنداز:

مثال ۳۰: نقطه $A=(-۲\ ,\ ۵)$ مفروض است. مطلوبست:

الف) بازتاب آن نسبت بر نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$

ب) دوران ۲۷۰ درجه ی آن

مثال ۳۱: مجموعه $F=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\middle| x,y\in R, x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\right\}$ مفروض است. مطلوبست رسم وتوصیف ویافتن تصویرش تحت ماتریس تبدیل $M=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$

دوران نقطه:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$

$$R_\theta^n = R_{n\theta}$$

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

کهاد ij ام: M_{ij}: ماتریسی که از حذف سطر iام وستون jام بدست می آید.

همساز ijام: $A_{ij} = (-1)^{i+j}|Mij|$

تابع دترمینان:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

مثال ۳۲: دترمینان ماتریس A را بر حسب بسط سطر اول ، سطر دوم و ستون دوم بدست آورید؟

روش ساروس برای محاسبه دترمینان های ۳×۳:

مثال ۳۳: دترمینان ماتریس A را به روش ساروس بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

ویژگی های دترمینان:

۱) اگر تمامی درایه های یک سطر یا یک ستون از ماتریسی برابر با صفر باشد، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثال ۳۴:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

۲) اگر دوسطر یا دو ستون از ماتریسی مضرب یکدیگر باشند دترمینان آن صفر است.

مثال ۳۵:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{bmatrix}$$

مثال:۳۶

۳) اگر در ماتریس جای دوسطر یا دو ستون را عوض کنیم دترمینان دریک (-) ضرب می شود.

مثال ۳۷:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ & -۶ \\ -۲ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

۴) اگر مضربی از یک سطر را به سطر دیگر یا مضربی از یک ستون را به ستون دیگر بیفزاییم حاصل دترمینان تغییر نمی کند.

مثال ۳۸:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ -۶ & ۴ & -۱۱ \\ -۱ & ۵ & -۴ \end{bmatrix}$$

۵) اگر یک سطر یا یک ستون از ماتریسی را در عددی مانند K ضرب کنیم دترمینان K برابر می گردد.

مثال ۳۹: $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱۲ & ۸ & ۲ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$

۶) $|KA| = K^{\overset{n}{\downarrow}} |A|$ $(K \in R)$ مرتبه ماتریس

۷) $|A| = |A^t|$

۸) $|AB| = |A||B|$

۹) $|A^n| = |A|^n$

۱۰) ماتریس AA^t که ماتریسی متقارن است دارای درایه های قطر اصلی نامنفی است ودترمینانش نیز نامنفی است.

۱۱) دترمینان ماتریس های پاد متقارن از مرتبه فرد صفر است.

۱۲) دترمینان ماتریس های بالا مثلثی – پایین مثلثی و قطری برابر است با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی

مثال ۴۰: $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$

۱۳) دترمینان ماتریس های شبه قطری ۳×۳ برابر است با: (–) حاصل ضرب درایه های روز قطر فرعی

مثال ۴۱: $A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & a \\ ۰ & b & ۰ \\ c & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

مثال ۴۲:

مثال ۴۳:

۱۴) $if: A \quad , \quad B \qquad (m>n) \qquad |AB| = ۰$

مثال ۴۴:

$$A_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$B_{۲\times۳} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & w \end{bmatrix}$$

۱۵) درجمع دترمینان ها اگر همه سطرها به جزیک سطر برابر باشند می توان
سطر برابر را دقیقاً نوشت وسطر نابرابر را درایه به درایه جمع کرد.
چنین مطلبی برای ستون ها نیز برقرار است.

مثال ۴۵:حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۷ & ۴ & ۱ \\ ۹ & ۱۵ & ۶ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۴ & ۵ \\ ۷ & ۲ & ۱ \\ ۶ & ۴ & ۵ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۶ & ۴ & ۵ \\ ۷ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۲ & -۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۶ & -۲ & ۱ \\ ۷ & ۲ & ۱ \\ ۶ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$$

۱۶) $|A| + |B| \neq |A+B|$

۱۷) ضرب خارجی:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}$$

۱۸) ضرب مختلط سه بردار:

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{vmatrix}$$

مثال ۴۶:

۱۹) معادله صفحه شامل ۳ نقطه ی $A=(x_۱ , y_۱ , z_۱)$, $B=(x_۲ , y_۲ , z_۲)$, $C=(x_۳ , y_۳ , z_۳)$ به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x-x_۱ & y-y_۱ & z-z_۱ \\ x_۲-x_۱ & y_۲-y_۱ & z_۲-z_۱ \\ x_۳-x_۱ & y_۳-y_۱ & z_۳-z_۱ \end{vmatrix}=۰$$

مثال ۴۷:

معادله صفحه ی شامل نقاط

A , B , C را بنویسید.

$$A=(-۲,۱,۵)$$
$$B=(۰,۲,۱)$$
$$C=(-۱,۰,۷)$$

۲۰) معادله خط شامل دونقطه $A=(a,b)$, $B=(c,d)$ به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix}=۰$$

$$y-b=\left(\frac{d-b}{c-a}\right)(x-a)$$

مثال ۴۸: معادله ی خط شامل A,B را بنویسید.

$$A=(۲,-۳)\ ,\ B=(۴,۵)$$

ماتریس هم سازه ها:

ماتریسی است که درایه های آن همسایه های ماتریس مفروضند.

$$N = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & A_{۱۳} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & A_{۲۳} \\ A_{۳۱} & A_{۳۲} & A_{۳۳} \end{bmatrix}$$ ماتریس هم سازه ها

ماتریس الحاقی:

ترانهاده ی ماتریس همسازه ها را ماتریس الحاقی می نامیم و آن را با A^* نشان می دهیم.

$$N^t = A^* = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix}$$

مثال های ۴۹: ماتریس هم سازه ها و ماتریس الحاقی ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

وارون ماتریسی:

وارون ماتریس مربعی مانند A ماتریسی هم مرتبه با A است که از ضرب A در آن یا آن در A ماتریس واحد هم مرتبه با آنان حاصل می گردد.

$$AA^{-۱} = A^{-۱}A = I$$

۱) $A_{|x|}=[a]\xrightarrow{|A|\neq ۰} A^{-۱}=\left[\frac{۱}{a}\right]$

۲) $A_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\xrightarrow{|A|\neq ۰} A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

۳) $A_{n\times n}=[aij]\xrightarrow{|A|\neq ۰}=\frac{۱}{|A|}A^*$

مثال ۵۰ وارون ماتریس های زیر را بیابید:

الف) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$

قضیه ۱: شرط لازم و کافی برای وارون پذیر بودن یک ماتریس آن است که دترمینانش صفر نباشد.

قضیه ۲: وارون ماتریس در صورت وجود منحصر به فرد است.

ویژگی های وارون ماتریس – ماتریس الحاقی وترانهاده:

۱) $\left(A^{-۱}\right)^{-۱} = A$

۲) $r \in R : (rA)^{-۱} = \frac{۱}{۲} A^{-۱}$

۳) $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$

۴) $\left(A^{n}\right)^{-۱} = \left(A^{-۱}\right)^{n}$

۵) $\left(A^{t}\right)^{-۱} = \left(A^{-۱}\right)^{t}$

۶) $\left|A^{-۱}\right| = \frac{۱}{|A|} = |A|^{-۱}$

۷) $if\ AB = BA \Rightarrow A^{n}B = BA^{n}$

$A^{-۱}B = BA^{-۱}$

۸) $A^{*} = |A|A^{-۱}$

۹) $AA^* = A^* A = |A| I$

۱۰) $|A^*| = |A|^{n-1}$ مرتبه: n

۱۱) $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

۱۲) $(A^*)^t = (A^t)^*$

۱۳) $(A^*)^n = (A^n)^*$

۱۴) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

۱۵) $r \in R : (rA)^* = r^{n-1} A^*$

۱۶) $(AB)^* = B^* A^*$

۱۷) اگر A ماتریسی وارون پذیر و متقارن باشد در این صورت $A^{-۱}$ نیز متقارن است.

۱۸) اگر A ماتریسی وارون پذیر وپادمتقارن باشد دراین صورت $A^{-۱}$ نیز پادمتقارن است.

۱۹) ماتریس A را متعامد نامیم هرگاه ترانهاده اش با وارونش برابر شود. $A^t = A^{-۱}$

دترمینان ماتریس های متعامد برابر است با ± ۱

۲۰) حاصل ضرب دو ماتریس متعامد، متعامد است.

۲۱) وارون ماتریس های بالا مثلثی ، بالا مثلثی؛ وارون ماتریس های پایین مثلثی، پایین مثلثی؛ وارون ماتریس های قطری، قطری است.

۲۲)

۲۳) $\left(BAB^{-۱}\right)^n = BA^n B^{-۱}$

*هریک از دترمینان های زیر را بدون استفاده از روش ساروس و بدون استفاده از بسط و تنها به کمک ویژگی های دترمینان بدست آورید.

۵۱ $$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

۵۲ $$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

۵۳ $$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

۵۴ $$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

هریک از تساوی های زیر رابه کمک ویژگی های دترمینان ثابت نمایید.

۵۵ $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

۵۶ $$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & z+1 \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲x & yz \\ ۱ & y & ۲xz \\ ۱ & z & ۲xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲x & ۴x^۲ \\ ۱ & y & y^۲ \\ ۱ & z & z^۲ \end{vmatrix}$$ ۵۷

مثال۵۸) اگر A ماتریس متقارن و B پادمتقارن باشند به طوری که $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$ آن گاه ماتریس AB چگونه است؟ (سراسری ۸۵)

**۱) قطری		۲) بالا مثلثی		۳) متقارن		۴) پادمتقارن**

مثال ۵۹) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه ها برابر ۶ و مقدار $|A| = ۸$ باشد x را بیابید؟ (سراسری ۸۵)

مثال ۶۰) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ & -۱ \\ ۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشته ایم دترمینان ماتریس متقارن کدام است؟ (سراسری ۸۶)

۱) -۴　　۲) -۲　　۳) ۲　　۴) ۴

مثال ۶۱) اگر A یک ماتریس پادمتقارن و ماتریس I-A وارون پذیر باشد، آن گاه $\left((I+A)^{-۱}\right)^{t}(I-A)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۶)

۱) A　　۲) $A^{-۱}$　　۳) $(x-A)^{-۱}$　　۴) I

مثال ۶۲) اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ عنصر سطر دوم و ستون دوم $A^{-۱}$ کدام است؟ (سراسری ۸۶)

۱) $-\frac{۲}{۳}$　　۲) صفر　　۳) $\frac{۵}{۹}$　　۴) $\frac{۲}{۳}$

مثال ۶۳) اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **عنصر سطر دوم و ستون سوم** A^{-1} **کدام است؟ (سراسری ۸۶)**

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

مثال ۶۴) اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ **به ازای کدام مقدار** a **، ماتریس** AA^t **وارون پذیر است؟ (سراسری ۸۷)**

مثال ۶۵) اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **آن گاه درایه ی واقع در سطر اول و ستون دوم** A^{-1} **را بیابید؟ (سراسری ۹۰)**

مثال ۶۶) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -\sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس $\left(\frac{۱}{۲}A\right)^{۳}$ را بیابید؟ (سراسری ۸۷)

مثال ۶۷) حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۱+x & x & y+z \\ ۱ & y & z+x \\ ۱ & z & x+y \end{vmatrix}$ با شرط $y=x+z$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) $x(x+z)$ ۲) $۲x(x+z)$ ۳) $x^{۲}(x+z)$ ۴) $۲x^{۲}(x+z)$

مثال ۶۸) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -tg\,x \\ tgx & ۱ \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس $A^{t}\ A^{-۱}$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) $[sin۲x \quad cos۲x]$ ۲) $[cos۲x \quad sin۲x]$

۳) $[sin۲x \quad -cos۲x]$ ۴) $[cos۲x \quad -sin۲x]$

مثال ۶۹) ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض است. دترمینان $\left(\frac{1}{2}AA^t\right)$ را بیابید. (سراسری ۸۹)

مثال ۷۰) اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2 \neq \overline{O}$, $A^3 = \overline{O}$ آن گاه معکوس ماتریس $I\text{-}A$ به کدام صورت است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $A^2 - A$　　۲) $A^2 + A$　　۳) $A^2 - A + I$　　۴) $A^2 + A + I$

مثال ۷۱) اگر $A - A^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$ مطلوبست a و b ؟ (خارج کشور ۸۸)

دستگاه های معادلات خطی:

اگر m معادله چنان باشند که n مجهول در تمامی آنان تکراری موجود باشد در این صورت اگر بخواهیم مجهولات را چنان بیابیم که همزمان در تمامی معادلات صدق نمایند می توانیم آنان یا در قالب یک دستگاه بررسی نماییم.

برای حل دستگاه های معادلات خطی روش های مختلفی وجود دارد که برخی از آنان عبارتنداز:

۱)روش حذفی: در این روش ابتدا یکی از مجهولات را از یکی از معادلات برحسب سایر مجهولات یافته وبا قراردادن آن در سایر معادلات از تعداد معادلات ومجهولات یکی کم می شود. اگر همین روش را ادامه دهیم درآخر به یک معادله ویک مجهول می رسیم که با حل آن مجهول را یافته و با قراردادنش در مراحل قبلی سایر مجهولات نیز بدست خواهند آمد.

❊ دستگاه زیر را به روش حذفی حل نمایید.

$$\begin{cases} x+۲y+۳z=۸ \\ -۶x+۴y+z=۶ \\ -x+۵y-۲z=۱ \end{cases}$$

۲) روش هندسی: این روش که برای دستگاه های ۲ معادله ۲ مجهول یا ۳معادله ۳ مجهول به کار می رود بدین ترتیب است که در دو معادله دو مجهول هرمعادله به عنوان معادله یک خط فرض می گردد. یعنی حل دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول به معنی بررسی اوضاع نسبی دوخط است که اگر موازی باشند دستگاه فاقد جواب است. اگر منطبق باشند دستگاه بی شمار جواب دارد و اگر متقاطع باشند دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

در دستگاه های ۳ معادله ۳ مجهول هرمعادله به عنوان معادله یک صفحه در فضا در نظر گرفته مـی شـود، یعنـی حـل دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول به معنی بررسی وضعیت نسبی ۳ صفحه درفضاست یعنی فصل مشترک ۲ تا از صـفحات را یافته ، اشتراک آن با صفحه سوم را بررسی می کنیم.

❋ دستگاه مثال قبل را به روش هندسی حل کنید.

$$\begin{cases} x+۲y+۳z=۸ \\ -۶x+۴y+z=۶ \end{cases}$$

۳) روش ماتریس وارون: در این روش ابتدا دستگاه معادلات را به صورت معادله ماتریس «$AX=B$» نوشته، سپس به شرط آن که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد از دستور «$X=A^{-۱}B$» مجهولات را می یابیم.

ماتریس مثال قبل را به روش وارون ماتریس حل کنید.

۴) روش کرامر: در این روش ابتدا A_e. ها را که همان ماتریس ضرایب می باشند. با این تفاوت که به جای ستون iام ماتریس مقادیر را نهاده ایم. تشکیل داده ، سپس از دستور $x_i = \frac{|Ai|}{|A|}$ مجهولات را می یابیم.

۶۱) مثال قبل را به روش کرامر حل نمایید.

ماتریس افزوده:

ماتریسی است که ستون اول تا nام آن ماتریس ضرایب است وستون $(n+1)$ آن ماتریس مقادیر است.

اعمال سطری مقدماتی:

۱) می‌توان هرسطر ماتریس افزوده راباسطردیگرآن‌جابجا نمود بدون آن که تغییری در جواب های دستگاه حاصل گردد.

۲) می‌توان هرسطر ماتریس افزوده را درعددی غیرصفرضرب‌کرد،بدون‌آن‌که تغییری درجواب‌های دستگاه حاصل گردد.

۳) می‌توان‌هرمضربی‌ازیک سطرماتریس‌افزوده رابه سطردیگرافزودبدون آن‌که تغییری درجواب‌های دستگاه حاصل گردد.

۵) روش حذفی گاؤس: در این روش ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل داده ، سپس به کمک اعمال سطری مقدماتی بدون توجه به ستون آخر ماتریس را بالا مثلثی می کنیم. پس از انجام این کار مجدداً دستگاه را تشکیل داده ، از معادله آخر شروع به یافتن مجهولات می کنیم.

* دستگاه مثال قبل رابه روش گاوس حل کنید.

۶) روش حذفی گاؤس – جردن: همان روش حذفی گاوس است با این تفاوت که ماتریس را قطری می کنیم که درایاه های قطر اصلی اش یک باشد.

۶۳- دستگاه مثال قبل را به روش گاوس – جردن حل کنید.

چند نکته مهم:

I) اگر در دستگاه معادلات خطی:

الف) تعداد معادلات ومجهولات برابر باشند $(m=n)$ در این صورت دستگاه در صورتی دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان ماتریس ضرایبش مخالف صفر باشد $(|A|\neq 0)$

اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر شود، دراین صورت دستگاه دارای جواب منحصر به فرد نیست یعنی یا فاقد جواب است یا بی شمار جواب دارد.

ب) اگر تعداد معادلات بیشتر از مجهولات باشد $(m>n)$ ، ممکن است $B=(b_1,b_2,....,b_m)$ موجود باشد که به ازای آن دستگاه دارای جواب نیست.

برای حل چنین دستگاه هایی به تعداد مجهولات معادله انتخاب کرده ، حل می کنیم. سپس جواب های بدست آمده را در معادلات باقی مانده قرار داده ، بررسی می کنیم.

ج) اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد مجهولات باشد $(m<n)$ ، دراین صورت دستگاه هرگز دارای جواب منحصر به فرد نخواهد بود. یعنی یا فاقد جواب است یا بی شمار جواب دارد.

II) اگر در دستگاهی تمامی مقادیر صفر باشند یعنی $B=\overline{O}$ در این صورت دستگاه به صورت $AX=\overline{O}$ خواهد بود که به آن دستگاه همگن می گوییم.

به‌شرط‌آن‌که $|A|\neq 0$ ، دستگاه همگن دارای‌جواب $X=\overline{O}$ خواهدبود که آن‌را جواب منحصر به‌فرد بدیهی‌دستگاه‌همگن می‌نامند.اگربخواهیم دستگاه همگن جواب غیرصفر داشته باشد. باید دترمینان ماتریس ضرایبش صفر شود.$(|A|=0)$ که در این صورت دستگاه دارای جواب منحصربه فرد نخواهد بود و بی شمار جواب خواهد داشت.

۶۴- دستگاه همگن زیر را حل کنید.

مثال ۷۲) دترمینان ماتریس ضریب دستگاه معادله های $\begin{cases} ax+y+۲z=۱ \\ x+by+۳z=۲ \\ cx+۲y-z=-۱ \end{cases}$ برابر ۴ است اگر $x=\frac{۱}{۲}$ آن گاه b را بیابید؟

(سراسری ۸۶)

مثال ۷۳) در دستگاه معادلات $\begin{cases} x+ay+z=۵ \\ ۲x+by+۲z=۹ \\ ۳x+۳y-z=۲ \end{cases}$ اگر دترمینان ضرایب برابر ۴ باشد مقدار y را بیابید؟ (سراسری۸۷)

مثال ۷۴) سه صفحه با معادلات ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$ داده شده اند. فصل مشترک هایی دوبه دو این سه صفحه چگونه هستند؟ (سراسری ۸۸)

مثال ۷۵) دستگاه‌معادلات به‌صورت $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۷ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ a \\ b \end{bmatrix}$ باکدام شرایط بی‌شمارجواب‌دارد؟(خارج ازکشور۸۵)

۱) $b=a+۲$ ۲) $b=a+۳$ ۳) $b=۲a+۳$ ۴) $b=۳a+۲$

مثال ۷۶) دستگاه $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & a \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ b \end{bmatrix}$ با کدام شرایط فاقد جواب است؟ (خارج از کشور۸۶)

۱) $b=۲\ ,a=۱$ ۲) $b\neq ۲\ ,\ a=۱$ ۳) $b=۱\ ,a=۲$ ۴) $b\neq ۱\ ,a=۲$

مثال ۷۷) اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$, $X.A=A^t$ آن گاه عضو $x_{۱۱}$ از ماتریس X را بیابید؟ (خارج کشور ۹۰)